

IT@CookBook, 기초 신호 및 시스템(2판)

[연습문제 답안 이용 안내]

- 본 연습문제 답안의 저작권은 한빛아카데미(주)에 있습니다.
- 이 자료를 무단으로 전재하거나 배포할 경우 저작권법 136조에 의거하여 최고 5년 이하의 징역 또는 5천만원 이하의 벌금에 처할 수 있고 이를 병과(併科)할 수도 있습니다.

제5장 연속 시간 푸리에 급수

[Quick Review]

※ 다음 문제에서 옳은 것을 골라라.

(1) 원래의 신호와 변환된 신호는 다른 신호이다. (○, ×)

Ans) ×

(2) 주파수 영역 변환을 위한 기저 신호는 주파수와 (일대일, 다대일) 대응이어야 한다.

Ans) 일대일

(3) 신호의 스펙트럼은 (진폭, 위상, 주파수)의 함수이다.

Ans) 주파수

(4) 서로 다른 신호라도 스펙트럼은 같을 수 있다. (○, ×)

Ans) ×

(5) 주기 신호와 같은 주기를 갖는 정현파 성분을 (기본파, 고조파)라고 한다.

Ans) 기본파

(6) 푸리에 급수 전개에 기저 신호들은 서로 직교성을 만족한다. (○, ×)

Ans) ○

(7) 모든 주기 신호는 푸리에 급수 전개가 가능하다. (○, ×)

Ans) ×

(8) 지수 함수 형식 푸리에 급수의 계수는 일반적으로 (실수, 복소수)이다.

Ans) 복소수

(9) 스펙트럼대로 정현파들을 합하여 신호를 만드는 것을 주파수 (합성, 분석)이라 한다.

Ans) 합성

(10) 주기 신호의 스펙트럼은 (선, 연속) 스펙트럼이다.

Ans) 선

(11) 진폭 스펙트럼은 시간축 상에서 각 정현파 성분의 위치를 나타낸다. (○, ×)

Ans) ×

(12) 파형의 시간적 변화가 완만한 신호는 진폭 스펙트럼의 감쇠가 (빠르다, 느리다).

Ans) 빠르다

(13) 주파수 합성으로 완벽한 사각 펄스를 만들 수 (있다, 없다).

Ans) 없다

(14) 위상 스펙트럼은 합성된 신호의 파형과는 상관이 없다. (○, ×)

Ans) ×

(15) 시간 이동에도 신호 파형이 똑같이 유지되려면 선형 위상이 되어야 한다. (○, ×)

Ans) ○

(16) 신호의 상하 이동은 (직류, 기본파, 고조파) 스펙트럼의 변화를 가져온다.

Ans) 직류

(17) 진폭 스펙트럼이 달라지려면 신호를 시간축 상에서 이동시키면 된다. (○, ×)

Ans) ×

(18) 시간 이동에 대해 기본파 위상 변화가 θ 라면 3고조파 위상 변화는 (θ , 3θ , 모름)이다.

Ans) 3θ

(19) 시간 영역에서 계산한 주기 신호 전력은 주파수 영역에서 계산된 값과 같다. (○, ×)

Ans) ○

(20) 홀수 고조파끼리는 서로 전력을 형성한다. (○, ×)

Ans) ×

[기초 문제]

5.1 다음의 주기 신호에 대하여 기본 주파수 ω_0 의 값을 구하고, 지수 함수 형식 푸리에 급수로 전개하여 스펙트럼을 그려라.

(a) $x(t) = 4\cos\left(\frac{\pi}{2}t + \frac{\pi}{4}\right)$

Ans) $\omega_0 = \frac{\pi}{2}$ [rad/sec]

$$x(t) = 2e^{-j\frac{\pi}{4}}e^{-j\frac{\pi}{2}t} + 2e^{j\frac{\pi}{4}}e^{j\frac{\pi}{2}t} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_k e^{jk\frac{\pi}{2}t}$$

$$\therefore X_{-1} = 2e^{-j\frac{\pi}{4}}, \quad X_1 = \frac{1}{2}e^{j\frac{\pi}{4}}$$

(b) $x(t) = 8\cos\left(12\pi t + \frac{\pi}{3}\right) + 6\sin\left(20\pi t + \frac{\pi}{6}\right)$

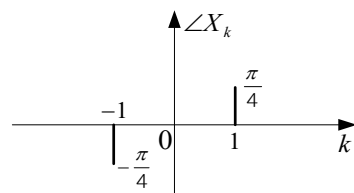
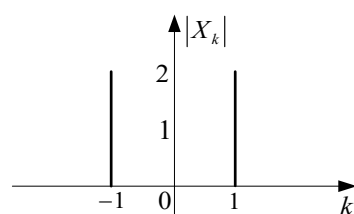
Ans) $x(t) = 4e^{-j\frac{\pi}{4}}e^{j12\pi t} + 4e^{j\frac{\pi}{4}}e^{-j12\pi t} + 3e^{-j\pi}e^{j20\pi t} + 3e^{j\pi}e^{-j20\pi t}$

기본 주파수 ω_0 는 12π 와 20π 의 최대공약수로 $\omega_0 = 4\pi$

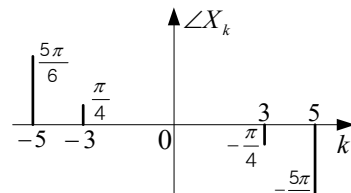
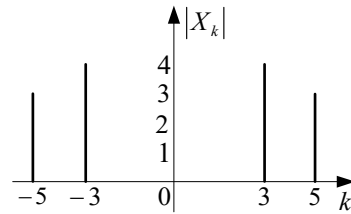
$$x(t) = 3e^{j\frac{5\pi}{6}}e^{-j20\pi t} + 4e^{j\frac{\pi}{4}}e^{-j12\pi t} + 4e^{-j\frac{\pi}{4}}e^{j12\pi t} + 3e^{-j\frac{5\pi}{6}}e^{j20\pi t}$$

$$= X_{-5}e^{-j5\omega_0 t} + X_{-3}e^{-j3\omega_0 t} + X_3e^{j3\omega_0 t} + X_5e^{j5\omega_0 t}$$

$$\therefore X_{-5} = 3e^{j\frac{5\pi}{6}}, \quad X_{-3} = 4e^{j\frac{\pi}{4}}, \quad X_3 = 4e^{-j\frac{\pi}{4}}, \quad X_5 = 3e^{-j\frac{5\pi}{6}}$$



(a)



(b)

(c) $x(t) = \sin\left(2t + \frac{\pi}{4}\right)$

Ans) $\omega_0 = 2$ [rad/sec]

$$x(t) = \frac{1}{2}e^{-j\frac{\pi}{4}}e^{j2t} + \frac{1}{2}e^{j\pi}e^{-j\frac{3\pi}{4}}e^{-j2t} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_k e^{jk2t}$$

$$\therefore X_{-1} = \frac{1}{2}e^{j\frac{\pi}{4}}, \quad X_1 = \frac{1}{2}e^{-j\frac{\pi}{4}}$$

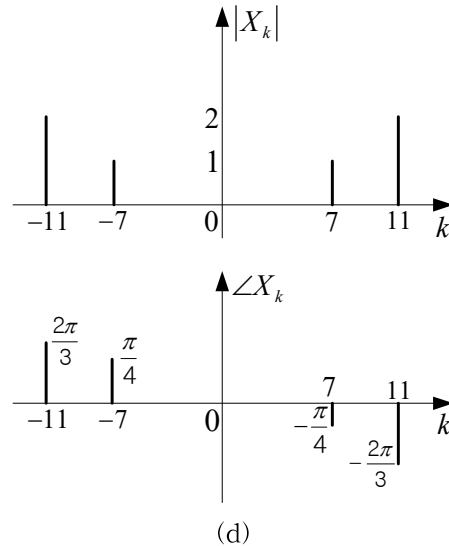
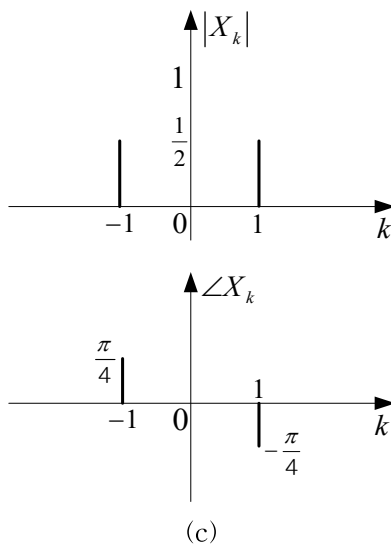
$$(d) \ x(t) = 2\cos\left(7\pi t - \frac{\pi}{4}\right) - 4\cos\left(11\pi t + \frac{\pi}{3}\right)$$

$$\text{Ans) } x(t) = e^{-j\frac{\pi}{4}} e^{j7\pi t} + e^{j\frac{\pi}{4}} e^{-j7\pi t} + 2e^{-j\pi} e^{j\frac{\pi}{3}} e^{j11\pi t} + 2e^{j\pi} e^{-j\frac{\pi}{3}} e^{-j11\pi t}$$

기본 주파수 ω_0 는 7π 와 11π 의 최대공약수로 $\omega_0 = \pi$

$$\begin{aligned} x(t) &= 2e^{j\frac{2\pi}{3}} e^{-j11\pi t} + e^{j\frac{\pi}{4}} e^{-j7\pi t} + e^{-j\frac{\pi}{4}} e^{j7\pi t} + 2e^{-j\frac{2\pi}{3}} e^{j11\pi t} \\ &= X_{-11} e^{-j11\omega_0 t} + X_{-7} e^{-j7\omega_0 t} + X_7 e^{-j7\omega_0 t} + X_{11} e^{j11\omega_0 t} \end{aligned}$$

$$\therefore X_{-11} = 2e^{j\frac{2\pi}{3}}, \quad X_{-7} = e^{j\frac{\pi}{4}}, \quad X_7 = e^{-j\frac{\pi}{4}}, \quad X_{11} = 2e^{-j\frac{2\pi}{3}}$$



5.2 주기 신호의 지수 함수 형식 푸리에 급수가 다음과 같을 때, 실수 주기 신호를 구하라.

$$(a) \ x(t) = e^{j\frac{\pi}{2}} e^{-j3\pi t} + 2e^{j\frac{\pi}{3}} e^{-j\pi t} + 3 + 2e^{-j\frac{\pi}{3}} e^{j\pi t} + e^{-j\frac{\pi}{2}} e^{j3\pi t}$$

$$\text{Ans) } \begin{cases} X_0 = 3 \\ X_1 = 2e^{-j\frac{\pi}{3}} \\ X_3 = 2 - j2 = e^{-j\frac{\pi}{2}} \end{cases}$$

$$x(t) = X_0 + \sum_k 2|X_k| \cos(k\omega_0 t + \angle X_k) = 3 + 4\cos\left(\pi t - \frac{\pi}{3}\right) + 2\cos\left(3\pi t - \frac{\pi}{2}\right)$$

$$(b) \ x(t) = -je^{-j4\pi t} + (1-j1)e^{-j2\pi t} + 2 + (1+j1)e^{j2\pi t} + je^{j4\pi t}$$

$$\text{Ans) } \begin{cases} X_0 = 2 \\ X_1 = 1+j1 = \sqrt{1^2+1^2} e^{j\tan^{-1}1} = \sqrt{2} e^{j\frac{\pi}{4}} \\ X_2 = j = e^{j\frac{\pi}{2}} \end{cases}$$

$$x(t) = X_0 + \sum_k 2|X_k| \cos(k\omega_0 t + \angle X_k) = 2 + 2\sqrt{2} \cos\left(2\pi t + \frac{\pi}{4}\right) + 2\cos\left(4\pi t + \frac{\pi}{2}\right)$$

$$(c) \ x(t) = (2-j2)e^{-j3\pi t} - j2e^{-j\pi t} + 3 + j2e^{j\pi t} + (2+j2)e^{j3\pi t}$$

$$\text{Ans)} \begin{cases} X_0 = 3 \\ X_1 = j2 = 2e^{j\frac{\pi}{2}} \\ X_3 = 2 + j2 = \sqrt{2^2 + 2^2} e^{j\arctan^{-1}\frac{2}{2}} = 2\sqrt{2} e^{j\frac{\pi}{4}} \end{cases}$$

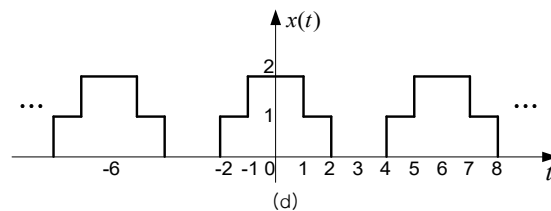
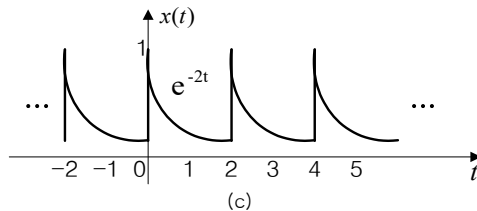
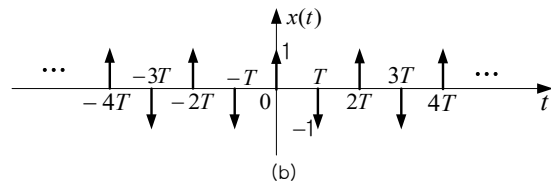
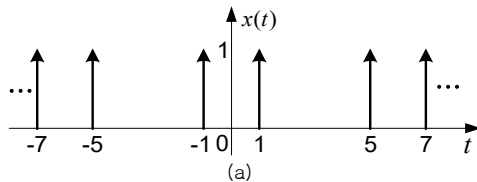
$$x(t) = X_0 + \sum_k 2|X_k| \cos(k\omega_0 t + \angle X_k) = 3 + 4\cos(\pi t + \frac{\pi}{2}) + 4\sqrt{2} \cos(3\pi t + \frac{\pi}{4})$$

$$(d) \quad x(t) = \frac{1}{2}e^{-j4\pi t} + j\frac{1}{2}e^{-j3\pi t} + (\sqrt{3} - j1)e^{-j\pi t} + 1 + (\sqrt{3} + j1)e^{j\pi t} - j\frac{1}{2}e^{j3\pi t} + \frac{1}{2}e^{j4\pi t}$$

$$\text{Ans)} \begin{cases} X_0 = 1 \\ X_1 = \sqrt{3} + j1 = 2e^{j\frac{\pi}{6}} \\ X_3 = -j\frac{1}{2} = \frac{1}{2}e^{-j\frac{\pi}{2}} \\ X_4 = \frac{1}{2} \end{cases}$$

$$x(t) = X_0 + \sum_k 2|X_k| \cos(k\omega_0 t + \angle X_k) = 1 + 4\cos(\pi t + \frac{\pi}{6}) + \cos(3\pi t - \frac{\pi}{2}) + \cos(4\pi t)$$

5.3 그림의 주기 신호에 대해 지수함수 형식 푸리에 급수를 구하고 스펙트럼을 그려라.



(a)

$$\text{Ans)} \text{ 기본 주파수 } \omega_0 = \frac{2\pi}{6} = \frac{\pi}{3}$$

$$X_k = \frac{1}{6} \int_{-3}^3 x(t) e^{-jk\frac{\pi}{3}t} dt = \frac{1}{6} \cos(\frac{\pi}{3}k)$$

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_k e^{jk\omega_0 t} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1}{6} \cos(\frac{\pi}{3}k) e^{jk\frac{\pi}{3}t}$$

그런데 $\frac{1}{6} \cos(\frac{\pi}{3}k)$ 는 k 값에 따라 주기 6으로 $[\frac{1}{6}, \frac{1}{12}, -\frac{1}{12}, -\frac{1}{6}, -\frac{1}{12}, \frac{1}{12}]$ 가 반복된다.

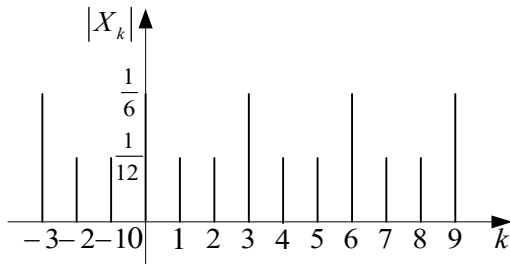
(b)

$$\text{Ans)} \text{ 기본 주파수 } \omega_0 = \frac{2\pi}{2T} = \frac{\pi}{T}$$

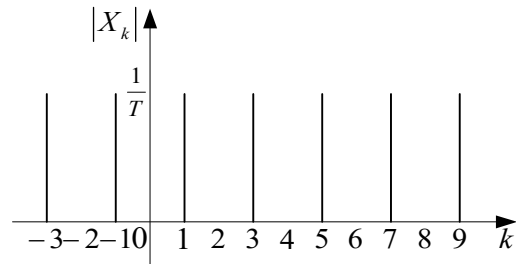
$$X_k = \frac{1}{2T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{3T}{2}} x(t) e^{-jk\omega_0 t} dt = \frac{1}{2T} (1 - e^{-jk\pi})$$

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_k e^{jk\omega_0 t} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1}{2T} (1 - e^{-jk\pi}) e^{jk\omega_0 t}$$

$$|X_k| = \begin{cases} \frac{1}{T}, & k = \text{홀수} \\ 0, & k = \text{짝수} \end{cases} \quad \& \quad \angle X_k = 0$$



(a)



(b)

(c)

Ans) 기본 주파수 $\omega_0 = \frac{2\pi}{2} = \pi$

$$X_k = \frac{1}{2} \int_0^2 x(t) e^{-jk\pi t} dt = \frac{(1 - e^{-4})}{2\sqrt{4 + \pi^2 k^2}} e^{-j \tan^{-1} \frac{\pi k}{2}}$$

따라서 $x(t)$ 의 지수함수 형식 푸리에 급수는 다음과 같다.

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_k e^{jk\omega_0 t} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1 - e^{-4}}{4 + j2\pi k} e^{jk\pi t} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{(1 - e^{-4})}{2\sqrt{4 + \pi^2 k^2}} e^{-j \tan^{-1} \frac{\pi k}{2}} e^{jk\pi t}$$

$|X_k|$ 는 k 의 증가에 따라 $\frac{(1 - e^{-4})}{4}$ 에서 0으로 값이 비선형으로 감소

$\angle X_k$ 는 0에서 $-\frac{\pi}{2}$ 까지 값이 비선형으로 변함

(d)

Ans) 기본 주파수 $\omega_0 = \frac{2\pi}{6} = \frac{\pi}{3}$

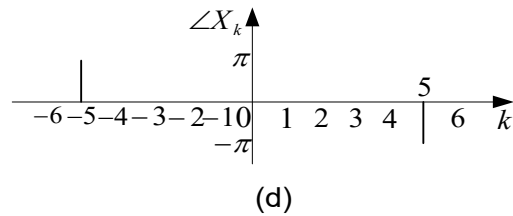
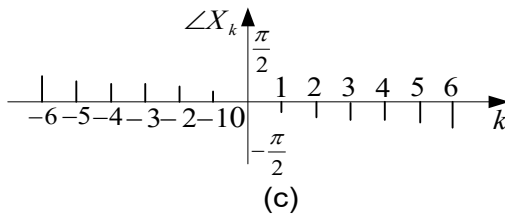
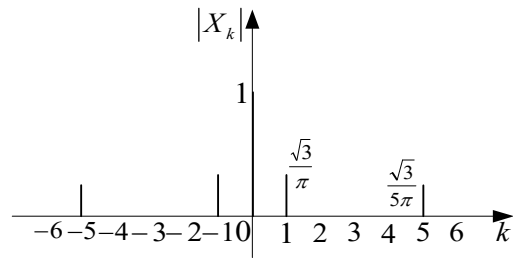
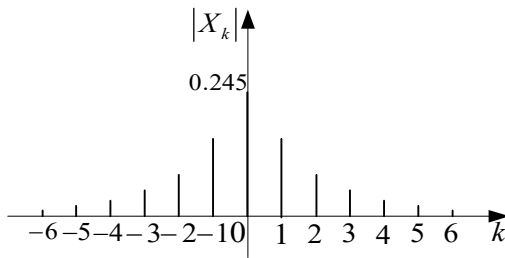
$$X_k = \frac{1}{6} \int_{-3}^3 x(t) e^{-jk\frac{\pi}{3}t} dt = \frac{1}{6} \int_{-3}^3 (\text{rect}(t/4) + \text{rect}(t/2)) e^{-jk\frac{\pi}{3}t} dt$$

$$= \frac{\sin(\frac{2\pi}{3}k) + \sin(\frac{\pi}{3}k)}{k\pi} = \frac{2}{3} \frac{\sin(\frac{2\pi}{3}k)}{\frac{2\pi}{3}k} + \frac{1}{3} \frac{\sin(\frac{\pi}{3}k)}{\frac{\pi}{3}k} = \text{sinc}(\frac{2}{3}k) + \text{sinc}(\frac{1}{3}k)$$

$$X_0 = \frac{1}{6} \int_{-3}^3 x(t) dt = 1$$

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_k e^{jk\omega_0 t} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left(\text{sinc}\left(\frac{2}{3}k\right) + \text{sinc}\left(\frac{1}{3}k\right) \right) e^{jk\frac{\pi}{3}t}$$

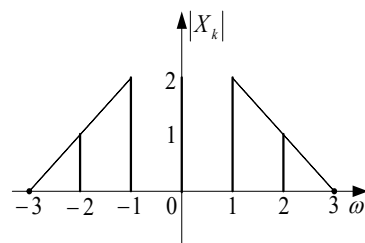
$$X_k = \frac{\sin(\frac{2\pi}{3}k) + \sin(\frac{\pi}{3}k)}{k\pi} \approx \frac{1}{k\pi} [\sqrt{3}, 0, 0, 0, -\sqrt{3}, 0] \text{이 반복된다.}$$



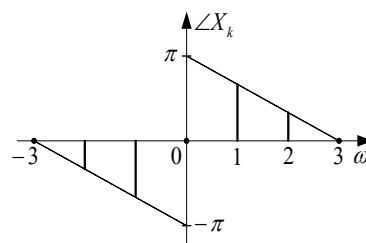
(c)

(d)

5.4 다음 그림은 주기 신호 $x(t)$ 의 지수함수 형식 푸리에 스펙트럼이다.



(a) 진폭 스펙트럼



(b) 위상 스펙트럼

(a) 그림을 보고 $x(t)$ 의 지수함수 형식 푸리에 급수를 구하라.

Ans) $\omega_0 = 1$

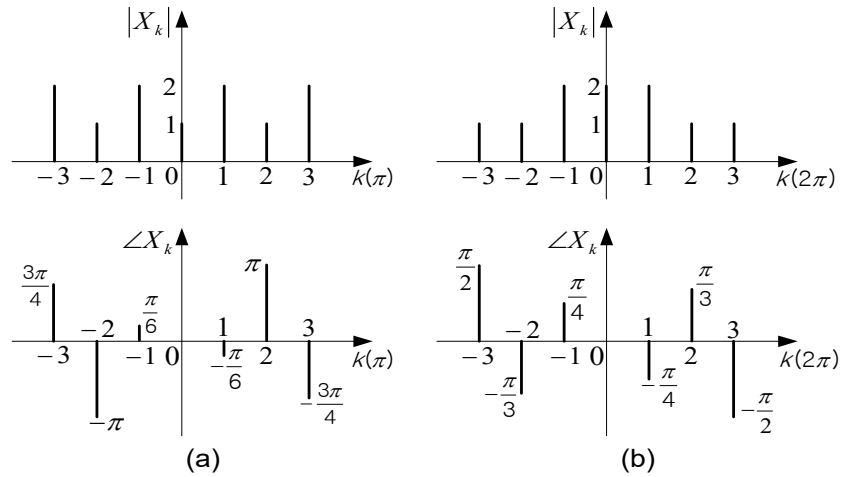
$$x(t) = \sum_{k=-2}^2 |X_k| e^{j\angle X_k} e^{jk\omega_0 t} = e^{-j\frac{\pi}{3}} e^{-j2t} + 2e^{-j\frac{2\pi}{3}} e^{-jt} + 2 + 2e^{j\frac{2\pi}{3}} e^{jt} + e^{j\frac{\pi}{3}} e^{j2t}$$

(b) (a)의 결과를 보고, $x(t)$ 의 삼각함수 형식 푸리에 급수를 구하라.

Ans) $\omega_0 = 1$

$$x(t) = \sum_{k=0}^2 c_k \cos(kt + \phi_k) = 2 + 4\cos(t + \frac{2\pi}{3}) + 2\cos(2t + \frac{\pi}{3})$$

5.5 주기 신호의 스펙트럼이 다음 그림과 같을 때, 주기 신호를 구하라.



Ans)

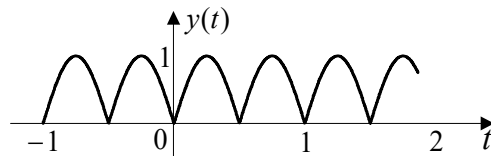
(a) 기본주파수 $\omega_0 = \pi$

$$\begin{aligned} x(t) &= X_0 + \sum_k 2|X_k| \cos(k\omega_0 t + \angle X_k) \\ &= 1 + 4\cos\left(\pi t - \frac{\pi}{6}\right) - 2\cos(2\pi t) + 4\cos\left(3\pi t - \frac{3\pi}{4}\right) \end{aligned}$$

(b) 기본주파수 $\omega_0 = 2\pi$

$$\begin{aligned} x(t) &= X_0 + \sum_k 2|X_k| \cos(k\omega_0 t + \angle X_k) \\ &= 2 + 4\cos\left(2\pi t - \frac{\pi}{4}\right) + 2\cos\left(4\pi t + \frac{\pi}{3}\right) + 2\sin(6\pi t) \end{aligned}$$

5.6 다음 그림은 전파 정류회로에 주기 $T=1$ 인 정현파 $\sin(2\pi t)$ 를 입력으로 인가하였을 때의 출력 파형이다. 물음에 답하라.



(a) 이 신호의 푸리에 급수를 구하라.

Ans) 기본 주파수 $\omega_0 = 4\pi$

$$\begin{aligned} Y_k &= \frac{1}{T} \int_0^T y(t) e^{-j4\pi kt} dt = \frac{1}{2\pi} e^{-jk\pi} (e^{-jk\pi} + e^{jk\pi}) \left(\frac{1}{2k+1} - \frac{1}{2k-1} \right) \\ &= \frac{2}{(1-4k^2)\pi} e^{-jk\pi} \cos k\pi = \frac{2}{(1-4k^2)\pi} \end{aligned}$$

(b) 정의식을 사용하지 말고, [예제 5-6]의 결과를 이용하여 푸리에 급수를 구하라.

Ans) 반파 정류 회로의 출력 $x(t)$ 의 푸리에 계수는

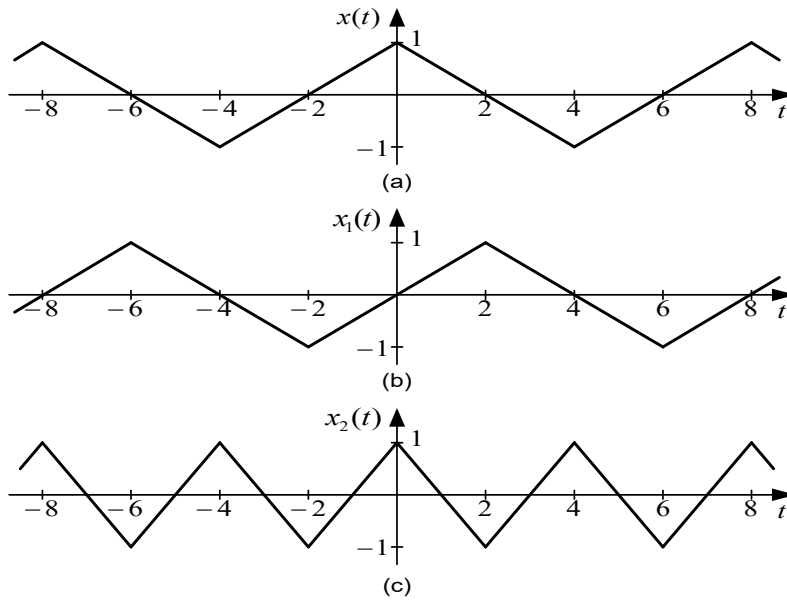
$$X_k = \begin{cases} -j\frac{1}{4}, & k=1 \\ \frac{1}{(1-k^2)\pi}, & k=\text{even} \\ 0, & k=\text{odd}, k \neq 1 \end{cases} \quad \& \quad X_{-k} = X_k^*$$

$$y(t) = x(t) + x\left(t - \frac{T}{2}\right) = x(t) + x\left(t - \frac{1}{2}\right)$$

$$\begin{aligned} y(t) &= x(t) + x\left(t - \frac{1}{2}\right) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_k e^{j2\pi kt} + \sum_{k=-\infty}^{\infty} X'_k e^{j2\pi kt} \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} (1 + (-1)^k) X_k e^{j2\pi kt} = \sum_{k'=-\infty}^{\infty} \frac{2}{(1 - 4k'^2)\pi} e^{j4\pi k' t} \\ &\quad \left(\because (1 + (-1)^k) X_k = \begin{cases} \frac{2}{(1 - k^2)\pi}, & k = \text{even} \\ 0, & k = \text{odd} \end{cases} \right) \end{aligned}$$

$$y(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} Y_k e^{j4\pi kt} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{2}{(1 - 4k^2)\pi} e^{j4\pi kt}$$

5.7 다음 그림의 신호에 대해 물음에 답하라.



(a) 그림 (a)의 신호에 대한 지수함수 형식 푸리에 급수를 구하라.

Ans) $T = 8, \quad \omega_0 = \frac{\pi}{4}$

$$\begin{aligned} X_k &= \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x(t) e^{-jk\omega_0 t} dt = \frac{1}{k^2 \pi^2} [(1 - e^{jk\pi}) - (e^{-jk\pi} - 1)] = \begin{cases} \frac{4}{k^2 \pi^2}, & k = \text{odd} \\ 0, & k = \text{even} \end{cases} \\ \therefore x(t) &= \sum_{k=\text{odd}} \frac{4}{k^2 \pi^2} e^{j \frac{k\pi}{4} t} \end{aligned}$$

(b) (a)의 결과를 이용하여 그림 (b)의 $x_1(t)$ 의 푸리에 급수를 구하라.

Ans) (b)의 파형은 (a)의 파형을 $t_0 = 2 = T/4$ 만큼 시간 지연한 것이다. 따라서

$$x_1(t) = x(t - 2) = \sum_{k=\text{odd}} \frac{4}{k^2 \pi^2} e^{j \frac{k\pi}{4} (t - 2)} = \sum_{k=\text{odd}} X'_k e^{j \frac{k\pi}{4} t}$$

$$X'_k = \begin{cases} \frac{4}{k^2 \pi^2} e^{-j \frac{k\pi}{2}}, & k = \text{odd} \\ 0, & k = \text{even} \end{cases}$$

(c) (a)의 결과를 이용하여 그림 (c)의 $x_2(t)$ 의 푸리에 급수를 구하라.

Ans) (c)의 파형은 (a)의 파형을 $a = 2$ 만큼 시간 척도조절(압축)한 것에 해당한다. 따라서

$$x_2(t) = x(2t) = \sum_{k=\text{odd}} \frac{4}{k^2 \pi^2} e^{j \frac{k\pi}{4}(2t)} = \sum_{k=\text{odd}} X'_k e^{j \frac{k\pi}{2}t}$$

$$X'_k = \begin{cases} \frac{4}{k^2 \pi^2}, & k = \text{odd} \\ 0, & k = \text{even} \end{cases}$$

5.8 정현파 $x(t) = A \sin(\omega_0 t)$ 의 전력을 정의식을 사용하지 말고 파스발 정리를 이용하여 구하라.

$$\text{Ans)} x(t) = \frac{A}{j2} (e^{j\omega_0 t} - e^{-j\omega_0 t}) = \frac{A}{2} e^{-j\frac{\pi}{2}} e^{j\omega_0 t} + \frac{A}{2} e^{j\frac{\pi}{2}} e^{-j\omega_0 t}$$

$$P_x = |X_{-1}|^2 + |X_1|^2 = \frac{A^2}{2}$$

5.9 다음에 주어진 주기 신호 $x(t)$ 의 전력을 계산하라.

$$(a) x(t) = 2\sqrt{2} \cos(2\pi t) + 3\sqrt{2} \cos(3\pi t)$$

$$\text{Ans)} P = \sum_{k=0}^{\infty} \bar{c}_k^2 = 2^2 + 3^2 = 13$$

$$(b) x(t) = 2\sqrt{2} \cos(2t) + 3\sqrt{2} \cos(3t)$$

$$\text{Ans)} P = \sum_{k=0}^{\infty} \bar{c}_k^2 = 2^2 + 3^2 = 13$$

$$(c) x(t) = 2\sqrt{2} \cos(2\pi t - \frac{\pi}{4}) + 3\sqrt{2} \cos(3\pi t + \frac{\pi}{6})$$

$$\text{Ans)} P = \sum_{k=0}^{\infty} \bar{c}_k^2 = 2^2 + 3^2 = 13$$

$$(d) x(t) = 2\sqrt{2} \cos(5\pi t) + 3\sqrt{2} \cos(11\pi t)$$

$$\text{Ans)} P = \sum_{k=0}^{\infty} \bar{c}_k^2 = 2^2 + 3^2 = 13$$

5.10 $5[\Omega]$ 의 저항에 $x(t) = 10\sqrt{2} \cos(t) + 30\sqrt{2} \cos(2t) + 20\sqrt{2} \cos(3t)$ 의 전압을 인가하였을 때 저항에서 소비되는 전력을 구하라.

$$\text{Ans)} i(t) = \frac{1}{5} (10\sqrt{2} \cos(t) + 30\sqrt{2} \cos(2t) + 20\sqrt{2} \cos(3t)) = 2\sqrt{2} \cos(t) + 6\sqrt{2} \cos(2t) + 4\sqrt{2} \cos(3t)$$

$$P = \bar{x}_1 \bar{i}_1 + \bar{x}_2 \bar{i}_2 + \bar{x}_3 \bar{i}_3 = 10 \times 2 + 30 \times 6 + 20 \times 4 = 280$$

[응용 문제]

5.11 다음 주기 신호에 대해 푸리에 급수를 구하고, 스펙트럼을 그려라.

(a) $x(t) = 2 \sin(\pi t) + \cos(3\pi t) - \cos(5\pi t)$

Ans) 기본 주파수 $\omega_0 = \pi$

$$x(t) = \frac{1}{2}e^{j\pi}e^{-j5\pi t} + \frac{1}{2}e^{-j3\pi t} + e^{j\frac{\pi}{2}}e^{-j\pi t} + e^{-j\frac{\pi}{2}}e^{j\pi t} + \frac{1}{2}e^{j3\pi t} + \frac{1}{2}e^{-j\pi}e^{j5\pi t}$$

기본파($|X_1| = 1$, $\phi_1 = -\frac{\pi}{2}$), 3고조파($|X_3| = \frac{1}{2}$, $\phi_3 = 0$), 5고조파($|X_5| = \frac{1}{2}$, $\phi_5 = -\pi$) 존재

$$|X_{-k}| = |X_k|, \phi_{-k} = -\phi_k$$

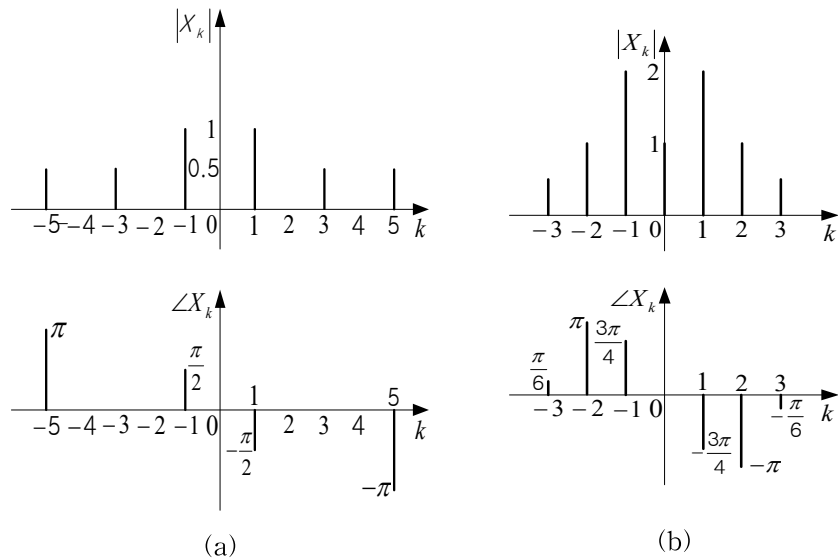
(b) $x(t) = 1 + 4 \sin\left(\pi t - \frac{\pi}{4}\right) - 2 \cos(2\pi t) + \sin\left(3\pi t + \frac{\pi}{3}\right)$

Ans) 기본 주파수 $\omega_0 = \pi$

$$x(t) = \frac{1}{2}e^{j\frac{\pi}{6}}e^{-j3\pi t} + e^{j\pi}e^{-j2\pi t} + 2e^{j\frac{3\pi}{4}}e^{-j\pi t} + 1 + 2e^{-j\frac{3\pi}{4}}e^{j\pi t} + e^{-j\pi}e^{j2\pi t} + \frac{1}{2}e^{-j\frac{\pi}{6}}e^{j3\pi t}$$

DC($X_0 = 1$), 기본파($|X_1| = 2$, $\phi_1 = -\frac{3\pi}{4}$), 2고조파($|X_2| = 1$, $\phi_2 = -\pi$), 3고조파($|X_3| = \frac{1}{2}$, $\phi_3 = -\frac{\pi}{6}$) 존재

$$|X_{-k}| = |X_k|, \phi_{-k} = -\phi_k$$



(c) $x(t) = \cos\left(2\pi t + \frac{\pi}{4}\right) - \sin(4\pi t) + \sin\left(6\pi t - \frac{\pi}{3}\right)$

Ans) 기본 주파수 $\omega_0 = 2\pi$

$$x(t) = \frac{1}{2}e^{j\frac{5\pi}{6}}e^{-j6\pi t} + \frac{1}{2}e^{-j\frac{\pi}{2}}e^{-j4\pi t} + \frac{1}{2}e^{-j\frac{\pi}{4}}e^{-j2\pi t} + \frac{1}{2}e^{j\frac{\pi}{4}}e^{j2\pi t} + \frac{1}{2}e^{j\frac{\pi}{2}}e^{j4\pi t} + \frac{1}{2}e^{-j\frac{5\pi}{6}}e^{j6\pi t}$$

기본파($|X_1| = \frac{1}{2}$, $\phi_1 = \frac{\pi}{4}$), 2고조파($|X_2| = \frac{1}{2}$, $\phi_2 = \frac{\pi}{2}$), 3고조파($|X_3| = \frac{1}{2}$, $\phi_3 = -\frac{5\pi}{6}$) 존재

$$|X_{-k}| = |X_k|, \phi_{-k} = -\phi_k$$

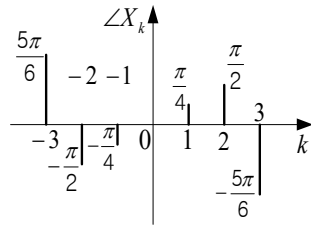
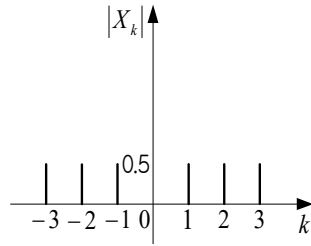
(d) $x(t) = \sin(3\pi t)\cos(5\pi t)$

Ans) 기본 주파수는 $\omega_0 = 2\pi$

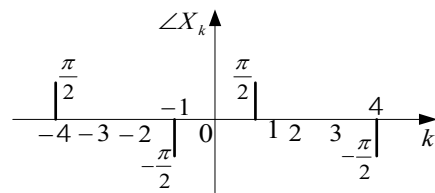
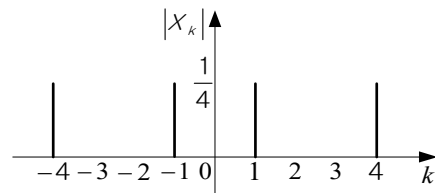
$$x(t) = \frac{1}{4}e^{j\frac{\pi}{2}}e^{-j8\pi t} + \frac{1}{4}e^{-j\frac{\pi}{2}}e^{-j2\pi t} + \frac{1}{4}e^{j\frac{\pi}{2}}e^{j2\pi t} + \frac{1}{4}e^{-j\frac{\pi}{2}}e^{j8\pi t}$$

기본파($|X_1| = \frac{1}{4}$, $\phi_1 = \frac{\pi}{2}$), 4고조파($|X_4| = \frac{1}{4}$, $\phi_4 = -\frac{\pi}{2}$) 존재

$$|X_{-k}| = |X_k|, \phi_{-k} = -\phi_k$$



(c)



(d)

5.12 삼각함수 형식 푸리에 급수 식 (5.6)의 푸리에 계수를 계산하는 관계식을 구하라.

Ans)

$$\int_T 1 \cdot \cos(k\omega_0 t) dt = 0$$

$$\int_T 1 \cdot \sin(k\omega_0 t) dt = 0$$

$$\int_T \cos(k\omega_0 t) \sin(m\omega_0 t) dt = \frac{1}{2} \int_T [\sin((m+k)\omega_0 t) + \sin((m-k)\omega_0 t)] dt = 0$$

$$\int_T \cos(k\omega_0 t) \cos(m\omega_0 t) dt = \begin{cases} \frac{1}{2} \int_T [\cos((m+k)\omega_0 t) + \cos((m-k)\omega_0 t)] dt = 0, & k \neq m \\ \int_T \cos^2(k\omega_0 t) dt = \int_T \frac{1 + \cos(2k\omega_0 t)}{2} dt = \frac{T}{2}, & k = m \end{cases}$$

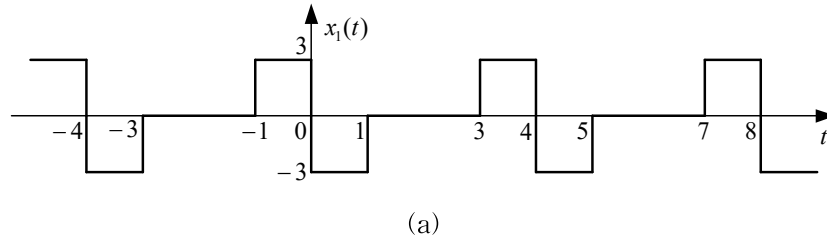
$$\int_T \sin(k\omega_0 t) \sin(m\omega_0 t) dt = \begin{cases} \frac{1}{2} \int_T [\cos((m-k)\omega_0 t) - \cos((m+k)\omega_0 t)] dt = 0, & k \neq m \\ \int_T \sin^2(k\omega_0 t) dt = \int_T \frac{1 - \cos(2k\omega_0 t)}{2} dt = \frac{T}{2}, & k = m \end{cases}$$

$$\therefore a_0 = \frac{1}{T} \int_T x(t) dt$$

$$a_k = \frac{2}{T} \int_T x(t) \cos k\omega_0 t dt$$

$$b_k = \frac{2}{T} \int_T x(t) \sin k\omega_0 t dt$$

5.13 다음 그림의 주기 신호에 대해 지수함수 형식 푸리에 급수를 구하라.

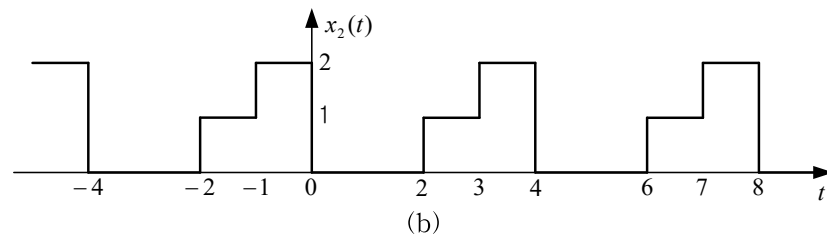


Ans) 기본 주파수 $\omega_0 = \frac{2\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$

$$X_k = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x(t) e^{-jk\frac{\pi}{2}t} dt = -\frac{3}{jk\pi} + \frac{3}{jk\pi} \left(\frac{e^{jk\frac{\pi}{2}} + e^{-jk\frac{\pi}{2}}}{2} \right) = j\frac{3}{k\pi} (1 - \cos \frac{\pi}{2}k)$$

$$\therefore X_k = \begin{cases} j\frac{3}{k\pi}, & k = 1, 3, 5 \dots \\ j\frac{6}{k\pi}, & k = 2, 6, 10 \dots \\ 0, & k = 4, 8, 12, \dots \end{cases}$$

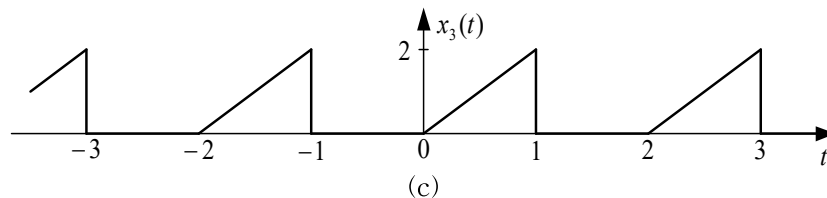
$$X_0 = \frac{1}{T} \left(\int_0^1 (-3) dt + \int_3^4 3 dt \right) = \frac{1}{4} \left(-3t \Big|_0^1 + 3t \Big|_3^4 \right) = 0$$



Ans) 기본 주파수 $\omega_0 = \frac{2\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$

$$X_k = \frac{1}{T} \int_0^T x(t) e^{-jk\omega_0 t} dt = j\frac{1}{2k\pi} \left(-e^{-jk\frac{3}{2}\pi} - e^{-jk\pi} + 2e^{j2k\pi} \right)$$

$$X_0 = \frac{1}{T} \int_0^T x(t) dt = \frac{1}{4} \int_2^3 dt + \frac{1}{4} \int_3^4 2 dt = \frac{3}{4}$$



Ans) 기본 주파수 $\omega_0 = \frac{2\pi}{2} = \pi$

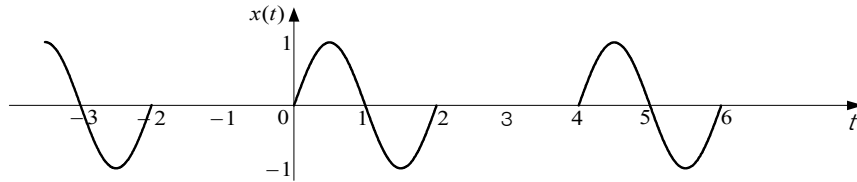
$$X_k = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x(t) e^{-jk\pi t} dt \equiv j\frac{e^{-jk\pi}}{k\pi} + \frac{e^{-jk\pi}}{k^2\pi^2} - \frac{1}{k^2\pi^2}$$

$$\ast \int x e^{ax} dx = \frac{e^{ax}}{a} \left(x - \frac{1}{a} \right)$$

$$X_0 = \frac{1}{2} \int_0^1 2t dt = \frac{1}{2}$$

5.14 다음 그림의 주기 신호에 대해 지수함수 형식 푸리에 급수를 구하라.

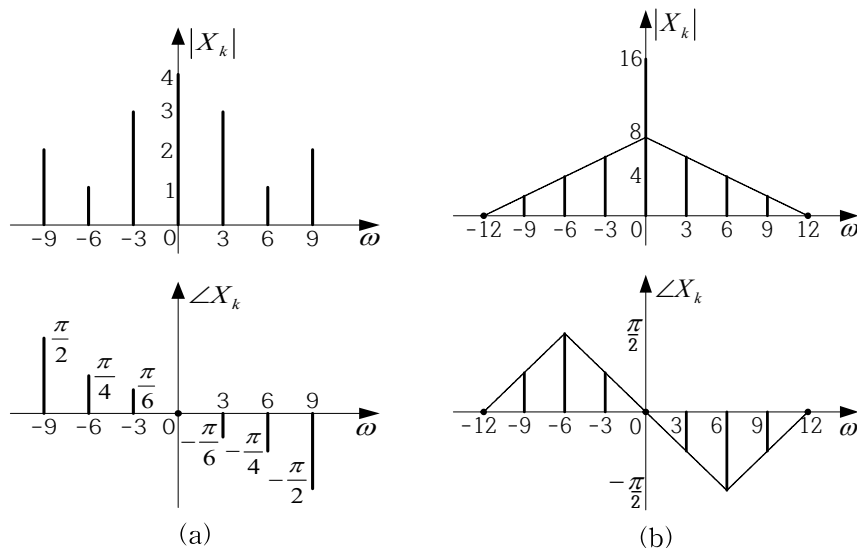
힌트 : $x(t) + x(t-2) = \sin(\pi t)$,



Ans) 기본 주파수 $\omega_0 = \frac{\pi}{2}$.

$$\begin{aligned} x(t) &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_k e^{jk\omega_0 t} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_k e^{jk\frac{\pi}{2}t} \\ X_k &= \frac{1}{T} \int_T x(t) e^{-jk\omega_0 t} dt = \frac{1}{4} \int_0^2 (\sin \pi t) e^{-j\frac{k\pi}{2}t} dt \\ &= \frac{1}{4} \int_0^2 j \frac{1}{2} (e^{-j\pi t} - e^{j\pi t}) e^{-j\frac{k\pi}{2}t} dt = j \frac{1}{8} \int_0^2 \left(e^{-j\frac{(k+2)\pi}{2}t} - e^{-j\frac{(k-2)\pi}{2}t} \right) dt \\ \therefore X_k &= \begin{cases} j \frac{1}{4} = \frac{1}{4} e^{j\frac{\pi}{2}}, & k = -2 \\ -j \frac{1}{4} = \frac{1}{4} e^{-j\frac{\pi}{2}}, & k = 2 \\ 0, & k = \text{짝수} (\neq \pm 2) \\ \frac{2}{(4-k^2)\pi}, & k = \text{홀수} \end{cases} \end{aligned}$$

5.15 주기 신호의 스펙트럼이 다음 그림과 같을 때, 주기 신호를 구하라.



(a) $\omega_0 = 1$

$$\begin{aligned} X_{-9} &= 2e^{j\frac{\pi}{2}}, & X_{-6} &= e^{j\frac{\pi}{4}}, & X_{-3} &= 3e^{j\frac{\pi}{6}}, & X_0 &= 4, \\ X_3 &= 3e^{-j\frac{\pi}{6}}, & X_6 &= e^{-j\frac{\pi}{4}}, & X_9 &= 2e^{-j\frac{\pi}{2}} \\ x(t) &= 4 + 6\cos(3t - \frac{\pi}{6}) + 2\cos(6t - \frac{\pi}{4}) + 4\cos(9t - \frac{\pi}{2}) \\ &= 4 + 6\cos(3t - \frac{\pi}{6}) + 2\cos(6t - \frac{\pi}{4}) + 4\sin(9t) \end{aligned}$$

(b) $\omega_0 = 1$

$$\begin{aligned} X_{-9} &= 2e^{j\frac{\pi}{4}}, & X_{-6} &= 4e^{j\frac{\pi}{2}}, & X_{-3} &= 6e^{j\frac{\pi}{4}}, & X_0 &= 16, \\ X_3 &= 6e^{-j\frac{\pi}{4}}, & X_6 &= 4e^{-j\frac{\pi}{2}}, & X_9 &= 2e^{-j\frac{\pi}{4}} \\ x(t) &= 16 + 12\cos(3t - \frac{\pi}{4}) + 8\cos(6t - \frac{\pi}{2}) + 4\cos(9t - \frac{\pi}{4}) \\ &= 16 + 12\cos(3t - \frac{\pi}{4}) + 8\sin(6t) + 4\cos(9t - \frac{\pi}{4}) \end{aligned}$$

5.16 푸리에 급수에 대한 다음의 설명 중 틀린 것은?

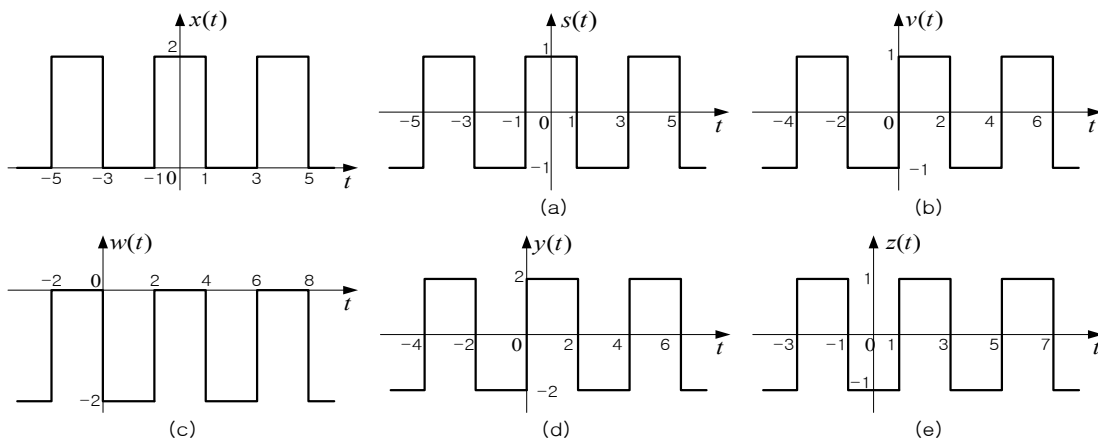
- ㉠ 주기 T 인 주기 신호는 $\omega = \frac{3\pi}{T}$ 와 $\omega = \frac{9\pi}{T}$ 의 주파수 성분을 갖는다.
- ㉡ 5고조파의 주파수가 10π 인 주기 신호의 주기는 $T = 1$ 이다.
- ㉢ 우대칭 주기 신호의 고조파의 위상은 0 또는 $\pm\pi$ 이다.
- ㉣ 대칭성을 만족하지 않는 실수 신호의 푸리에 계수는 복소수이다.

Ans) ㉠

기본 주파수 $\omega_0 = \frac{2\pi}{T}$

주기 신호는 기본 주파수의 정수배가 되는 고조파들만 가짐

5.17 다음 그림의 신호 $x(t)$ 에 대한 푸리에 계수가 $X_k = \text{sinc}(\frac{k}{2})$ 라고 한다. 푸리에 급수의 성질을 이용하여 나머지 신호들의 지수함수 형식 푸리에 급수를 구하라.



(a)

Ans) $s(t) = x(t) - 1$

기본주파수 $\omega_0 = \frac{2\pi}{T} = \frac{\pi}{2}$

$$S_0 = X_0 - 1, \quad S_k = X_k$$

$$S_0 = X_0 - 1 = \text{sinc}(0) - 1 = 1 - 1 = 0$$

$$S_k = X_k = \text{sinc}\left(\frac{k}{2}\right), \quad k \neq 0$$

(b)

Ans) $v(t) = x(t-1) - 1$

$$V_0 = X_0 - 1, \quad V_k = e^{-j\frac{\pi}{2}k} X_k$$

$$V_0 = X_0 - 1 = \text{sinc}(0) - 1 = 1 - 1 = 0$$

$$V_k = e^{-j\frac{\pi}{2}k} X_k = e^{-j\frac{\pi}{2}k} \text{sinc}\left(\frac{k}{2}\right) = -j\frac{1}{k\pi}(1 - e^{-j\pi k}) = \begin{cases} -j\frac{2}{k\pi}, & k = \text{홀수} \\ 0, & k = \text{짝수} \end{cases}$$

(c)

Ans) $w(t) = x(t+1) - 2$

$$W_0 = X_0 - 2, \quad W_k = e^{j\frac{\pi}{2}k} X_k$$

$$W_0 = X_0 - 2 = \text{sinc}(0) - 1 = 1 - 2 = -1$$

$$W_k = e^{j\frac{\pi}{2}k} X_k = e^{j\frac{\pi}{2}k} \text{sinc}\left(\frac{k}{2}\right) = -j\frac{1}{k\pi}(e^{j\pi k} - 1) = \begin{cases} j\frac{2}{k\pi}, & k = \text{홀수} \\ 0, & k = \text{짝수} \end{cases}$$

(d)

Ans) $y(t) = 2x(t-1) - 2$

$$Y_0 = 2X_0 - 2, \quad Y_k = 2e^{-j\frac{\pi}{2}k} X_k$$

$$Y_0 = 2X_0 - 2 = 2\text{sinc}(0) - 2 = 2 - 2 = 0$$

$$Y_k = 2e^{-j\frac{\pi}{2}k} X_k = 2e^{-j\frac{\pi}{2}k} \text{sinc}\left(\frac{k}{2}\right) = -j\frac{2}{k\pi}(1 - e^{-j\pi k}) = \begin{cases} -j\frac{4}{k\pi}, & k = \text{홀수} \\ 0, & k = \text{짝수} \end{cases}$$

(e)

Ans) $z(t) = x(t-2) - 1$

$$Z_0 = X_0 - 1, \quad Z_k = e^{-j\pi k} X_k$$

$$Z_0 = X_0 - 1 = \text{sinc}(0) - 1 = 1 - 1 = 0$$

$$Z_k = e^{-j\pi k} X_k = e^{-j\pi k} \text{sinc}\left(\frac{k}{2}\right) = (-1)^k \text{sinc}\left(\frac{k}{2}\right) = \begin{cases} \text{sinc}\left(\frac{k}{2}\right), & k = \text{짝수} \\ -\text{sinc}\left(\frac{k}{2}\right), & k = \text{홀수} \end{cases}$$

5.18 주기 T 인 주기 신호 $x(t)$ 의 푸리에 계수를 X_k 라고 할 때, 주어진 주기 신호 $v(t)$ 에 대한 푸리에 급수 표현을 X_k 을 이용하여 나타내라.

(a) $v(t) = x(t-1)$

Ans) $x(t)$ 를 지수함수 형식 푸리에 급수로 표현하면

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_k e^{jk\omega_0 t}$$

$$X_k = \frac{1}{T} \int_T x(t) e^{-jk\omega_0 t} dt$$

따라서 $v(t)$ 의 지수함수 형식 푸리에 급수 표현은

$$v(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} V_k e^{jk\omega_0 t}$$

$$V_k = \frac{1}{T} \int_T x(t-1) e^{-jk\omega_0 t} dt = \frac{e^{-jk\omega_0}}{T} \int_T x(t') e^{-jk\omega_0 t'} dt'$$

$$\therefore V_k = e^{-jk\omega_0} X_k$$

(b) $v(t) = x(t) e^{j\frac{2\pi}{T}t}$

Ans) $\frac{2\pi}{T} = \omega_0$ 이므로

$$v(t) = x(t) e^{j\frac{2\pi}{T}t} = x(t) e^{j\omega_0 t}$$

$$V_k = \frac{1}{T} \int_T v(t) e^{-jk\omega_0 t} dt = \frac{1}{T} \int_T x(t) e^{-j(k-1)\omega_0 t} dt = X_{k-1}$$

$$\therefore V_k = X_{k-1}$$

(c) $v(t) = \frac{dx(t)}{dt}$

Ans) $x(t)$ 의 푸리에 급수 표현으로부터

$$v(t) = \frac{dx(t)}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} X_k e^{jk\omega_0 t} \right) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} jk\omega_0 X_k e^{jk\omega_0 t}$$

$$\therefore V_k = jk\omega_0 X_k$$

(d) $v(t) = x(t) \cos\left(\frac{2\pi}{T}t\right)$

Ans) $\cos\left(\frac{2\pi}{T}t\right) = \cos\omega_0 t = \frac{e^{j\omega_0 t} + e^{-j\omega_0 t}}{2}$

$$V_k = \frac{1}{T} \int_T v(t) e^{-jk\omega_0 t} dt = \frac{1}{T} \int_T x(t) \frac{e^{j\omega_0 t} + e^{-j\omega_0 t}}{2} e^{-jk\omega_0 t} dt = \frac{1}{2} (X_{k+1} + X_{k-1})$$

5.19 다음에 주어진 주기 신호 $x(t)$ 의 전력을 계산하라.

(a) $x(t) = 1 + 2\cos\left(\frac{2\pi}{3}t + \frac{\pi}{3}\right) + 4\sin\left(\frac{4\pi}{5}t + \frac{\pi}{6}\right)$

$$\text{Ans)} P = \sum_{k=0}^{\infty} \bar{c}_k^2 = 1^2 + \left(\frac{2}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{4}{\sqrt{2}}\right)^2 = 11$$

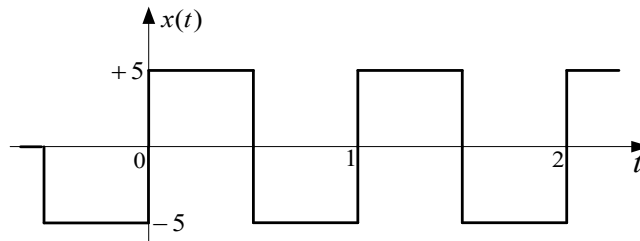
$$(b) x(t) = 2 + \cos\left(t + \frac{\pi}{4}\right) + 2\cos\left(3t + \frac{\pi}{6}\right) - \sin\left(4t + \frac{\pi}{3}\right)$$

$$\text{Ans)} P = \sum_{k=0}^{\infty} \bar{c}_k^2 = 2^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{2}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 = 7$$

$$(c) x(t) = 2 + \cos(\pi t) - \sin(\pi t) - 3\cos(2\pi t) + 4\cos\left(3\pi t - \frac{\pi}{3}\right)$$

$$P = \sum_{k=0}^{\infty} \bar{c}_k^2 = 2^2 + 1^2 + \left(\frac{3}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{4}{\sqrt{2}}\right)^2 = \frac{35}{2} = 17\frac{1}{2}$$

5.20 다음 그림의 사각 펄스(구형파) 주기 신호에 대해 물음에 답하라.



(a) 푸리에 급수를 구하라.

Ans) 이 신호의 주기는 $T=1$ 이므로 기본 주파수는 $\omega_0 = 2\pi$ 이다. 푸리에 계수를 계산하면

$$X_k = \int_{-1/2}^0 (-5)e^{-jk\omega_0 t} dt + \int_0^{1/2} 5e^{-jk\omega_0 t} dt = j\frac{5}{k\pi}(e^{-jk\pi} - 1) = \begin{cases} -j\frac{10}{k\pi}, & k = \text{홀수} \\ 0, & k = \text{짝수} \end{cases}$$

$$X_0 = \frac{1}{T} \int_T x(t) dt = 0$$

(b) 이 신호를 $100[\Omega]$ 의 저항에 인가할 때, 저항에서 소비되는 전력을 구하라.

$$\text{Ans)} P = |X_0|^2 + \sum_{k=1}^{\infty} 2|X_k|^2 = \sum_{k>0, k=\text{홀수}}^{\infty} 2\left(\frac{10}{k\pi}\right)^2 = \frac{200}{\pi^2} \sum_{k>0, k=\text{홀수}}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{200}{\pi^2} \frac{\pi^2}{8} = 25$$